

Dans cette séance on va voir

26.11

- (i) familles orthogonales et orthormes $\longrightarrow$ base orthogonale et orthormes (orthonormale)
- (ii) complément orthogonal $\longrightarrow$ lien avec $\text{Col}(A)$ et $\text{Lgn}(A)$
- (iii) définition du produit scalaire abstrait.

Motivation

$\longrightarrow$ pourquoi parler de distances et d'angles

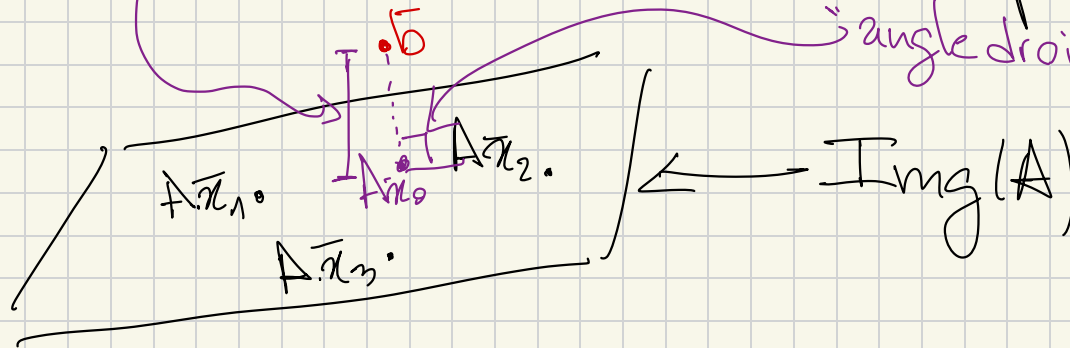
??

Souvent, on a un S.E.L. $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ incompatible (orthogonalité)

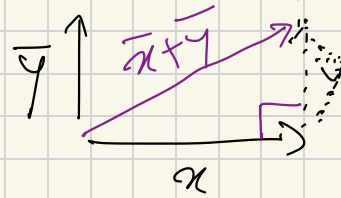
Dans ce cas, on veut trouver $\vec{x}_0$ tel que

$\text{dist}(A\vec{x}_0, \vec{b}) := \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\|$ soit le plus petit possible.

Alors:



Fait! $\bar{x} \perp \bar{y}$ (i.e. $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$) $\Leftrightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$
 (identité pythagoricienne)



Déf. 12.12 Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SEV, on définit le complément orthogonal de W par

$$W^\perp := \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^n : \bar{v} \cdot \bar{w} = 0, \forall \bar{w} \in W \}$$

Exemple 12.13*

$$W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow W^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W^\perp \stackrel{\text{dét}}{\Leftrightarrow} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\lambda(x+y)} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{x} = -y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow W^\perp = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Lemme 16 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEU et $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ base de W .
Alors $\bar{v} \in W^\perp$ ssi $\bar{v} \cdot \bar{w}_1 = \dots = \bar{v} \cdot \bar{w}_k = 0$

Calcul de $W^\perp$: (1) Calculer une base de $W \leadsto \mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$
(2) $W^\perp = \text{Ker}([\bar{w}_1 \dots \bar{w}_k]^T)$

Dans l'exemple précédent $W^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

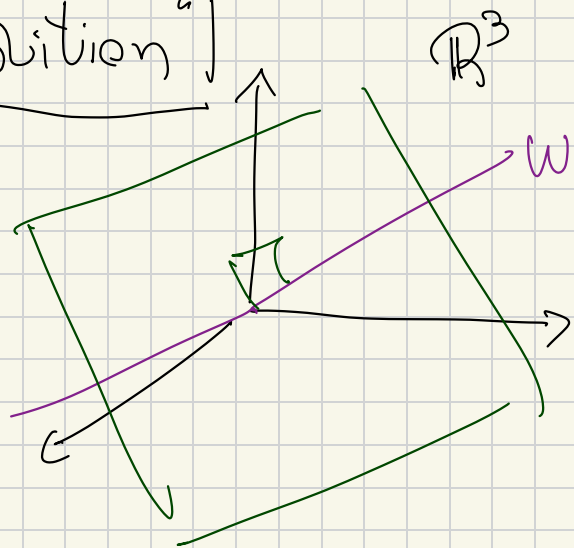
PROPRIÉTÉS DE $W^\perp$ (Proposition 15) Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SEU :

(1) $W^\perp$ est SEU de $\mathbb{R}^n$

(2) $(W^\perp)^\perp = W$

(3) $\dim W + \dim W^\perp = n \leftarrow (\text{exo de la feuille 12})$

"Intuition"



$$W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \right\}$$

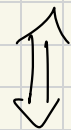
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{var liée } x} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{var libres } y, z}$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$x+y+z=0 \iff x = -y-z$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple Soit $W = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Calculer une base de $W^\perp$.

$$[\bar{w}_1, \bar{w}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [\bar{w}_1, \bar{w}_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F.F.R.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

var liées var libre

Cas intéressant $\rightarrow \text{Col}(A)$ et $\text{Lgn}(A)$

Thm 12.18 Pour A matrice : (a) $\text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$, (b) $\text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$

Def 12.19

$\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite

- orthogonale si $\bar{w}_i \perp \bar{w}_j, \forall i \neq j$;
- orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et $\|\bar{w}_i\| = 1, \forall i$

Une base est orthogonale (resp. orthonormée) si elle est orthogonale (resp. orthonormée) comme famille.

Prop. 12.21

$\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ orthogonale et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i \Rightarrow \left\{ \frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|}, \dots, \frac{\bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|} \right\}$ orthonormée

Deux propriétés importantes:

(Lemme 17) (i) Si $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ orthogonale et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i \Rightarrow \mathcal{F}$ libre

(Thm 12.23) (ii) Si $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base orthogonale de $W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \forall \bar{w} \in W$

$$[\bar{w}]_B = \begin{pmatrix} \frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|^2} \end{pmatrix}$$

BO = base orthogonale
 BON = base orthonormée

Définition du produit scalaire abstrait

Soit V un EV. Un produit scalaire sur V est une application qui associe un nombre réel $(u|v)$ à toute paire $u, v \in V$ telle que

(PS.1) $(u|v) = (v|u), \forall u, v \in V$

(PS.2) $(u + \lambda u' | v) = (u|v) + \lambda(u'|v)$ et $(u | v + \mu v') = (u|v) + \mu(u|v')$ $\forall u, u', v, v' \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(PS.3) $(u|u) \geq 0, \forall u \in V$ et $(u|u) = 0$ ssi $u = 0_V$

Exemple Si $V = \mathbb{R}^n$ et $(\bar{u}|\bar{v}) := \bar{u} \cdot \bar{v}$ est un produit scalaire abstrait.

Exemple Pour $V = \mathbb{P}_2$ et

évaluation de p en 1!

$$(p \mid q) = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$$

évaluation de p en 0!

Vérifier les axiomes! $\rightarrow$ Voir le détail dans les notes manuscrites.